

Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (10+5+10+5 Pkt.): Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -8 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie $\det(\lambda I_3 - B) = \lambda^3 - 4\lambda^2 - 9\lambda$ und bestimmen Sie die Eigenwerte von B .
- (b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A .
- (c) Bestimmen Sie die zu den Eigenwerten von A jeweils einen Eigenvektor.
- (d) Verifizieren Sie $A = UDU^T$ für $U = \left(\frac{u^{(1)}}{\|u^{(1)}\|_2} \quad \frac{u^{(2)}}{\|u^{(2)}\|_2} \right)$ und $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, wobei λ_i die Eigenwerte mit zugehörigem Eigenvektor $u^{(i)}$ bezeichne für $i \in \{1, 2\}$.

Aufgabe 2 (6+4 Pkt.): Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}x_1^2 - x_1x_2 + \frac{1}{3}x_2^3 + x_2 - x_1.$$

- (a) Zeigen Sie, dass alle Punkte $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ mit $\nabla f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben sind durch $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- (b) Berechnen Sie die sogenannte Hesse-Matrix $H = H(x) := D^2f(x)$, die durch die folgenden Einträge gegeben ist:
$$H_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f(x) \right).$$
 Zur Berechnung von H werden die Einträge $\frac{\partial}{\partial x_j} f(x)$ des Gradienten $1 \leq j \leq 2$ also erneut nach den Variablen x_i abgeleitet (für $1 \leq i \leq 2$).

Abgabe: In den entsprechenden Zettelkasten gegenüber vom Raum 25.22.00.58 oder über Ilias bis Mi., 08.07.2026, 10:00 Uhr.

Besprechung: In der Übung am Mi., 08.07.2026.